数学概貌丛书

数 理 逻 辑 概 貌

莫绍揆 著

科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书向初学者扼要介绍数理逻辑的各部分内容。在逻辑演算中除介绍真值联结词与量词的公理系统外，还介绍了自然推理系统，以冀这个方便的工具可以早日普及。在集合论中介绍了集合论悖论的产生，当初解决悖论的各种尝试，以便读者可以理解现在的公理集合论的来龙去脉。递归论中除介绍各种重要的递归函数类外，着重指出各种推广的重要应用。证明论中介绍数学基础方面的各个派别以及不完全性定理，它指导着证明论的发展趋向。在模型论中除介绍一些重要的定理外，着重介绍非标准模型的出现，这是近代数理逻辑的一个新奇点。本书是一本科普读物，可供没有经过正规数学训练的初学者阅读和参考。

数学概貌丛书

数 理 逻 辑 概 貌

莫绍揆 著

*

科学技术文献出版社出版

(北京市复兴路 15 号)

上海市新华印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 850×1156　1/32　印张 2　字数 35,000

1989 年 3 月第 1 版　1989 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—4,000

定价：0.95 元

ISBN 7-5023-0661-7/O·51

目　　录

一、逻辑演算 …………………………………… 2
二、集合论 ……………………………………25
三、递归论 ……………………………………38
四、证明论 ……………………………………47
五、模型论 ……………………………………51

数理逻辑是用数学方法（主要是建立符号体系的方法）来研究推理过程的科学．在古代，亚里斯多得(Aristotles)已经比较详细而有系统地研究过推理过程（主要见于他所著的《工具论》)，这便是古代的形式逻辑学．在亚里斯多得的工作中，已经有关于命题联结词以及有关量词的一些理论．随着近代数学的发展，不但提供了建立符号体系的方法，而且有关命题联结词与量词的使用也大大突破了古代的研究范围，于是，新逻辑学的发生不但有其必要，也有其可能了．

数理逻辑的创始人，一般当推莱布尼茨(G. W. Leibniz)，他强调逻辑学学习数学的必要，而且也零星地从事一些新逻辑的建立工作．其次是布尔(G. Boole)，他实质上已建立了命题演算．第三是弗雷格(G. Frege)，他不但正式建立了命题演算，且引入量词，实质上建立了谓词演算系统．更主要的是，他从集合论来推导自然数论．虽则他的集合论是素朴的，但开创了数理逻辑发展的主要方向．与他同时，以及稍后不久，皮尔斯(C. S. Peirce)、皮亚诺(G. Peano)以及罗素(B. A. W. Russell)，便把数理逻辑发展成熟了．可以说，到了罗素时，数理逻辑的基础部分——逻辑演算，已经告成．

二十世纪以后，经过数理逻辑学家的努力，数理逻辑在其基础之上，又发展了四大分支

其一是集合论（素朴）集合论本身有矛盾，如何克服其矛盾，是数理逻辑的一大问题．对此，大家议论纷纷，这也就促进了它的发展．此外，尽管集合论的悖论未能得到大家一致同意的解决办法，但各支数学都逐渐地大量地使用集合论的概念及其成果，使集合论事实上成为数学的基础，这也促进了它的发展．

其二是递归论．在解决悖论的讨论中，大家看到了能行性的重要．一条存在定理，其不提供寻找该根方法的证明，是与提供寻找方法的证明有着明显的差别的．对能行性的研究，便导致递归论的进展．

其三是证明论．这是直接证明数学的融贯性（不矛盾性），从而解决由集合论悖论所引起的危机．证明论的发展，后来在许多方面有其用处．

其四是模型论．为数学理论建立模型，从而研究数学理论的特性．这是最新的一个分支，其研究也最活跃．

一、逻辑演算

现在我们先介绍逻辑演算．演算分两个部分：命题演算与谓词演算．

什么叫做命题呢？可以说，表示一个个体具有什么

性质，或表示某些个体之间具有什么关系的，**便是命题**．这时，我们将把命题分成更基本的、更简单的成分，即个体与性质、关系（合称谓词）．但是，在命题演算中，人们经常对命题不再进行分析（而把它作为基本要素），上面的回答便不合适了．这时只能作如下的回答，日常语言中的句子，如果它可以取得真或假值，便叫做**命题**．因此，大体说来，陈述句如

今天下雨，

3 大于 2 而小于 5

便是命题，而命令句或祈求句如

（你）快离开这里！（命令句）

但愿他能悬崖勒马！（祈求句）

便不是命题．有个别数理逻辑家认为，"命题"实质上就是真或假，是真值（假值）的各种不同的表示形式．这种说法把命题限于真、假值，而抹杀其内容含意，是不可取的，也很少得到别的数理逻辑家的赞同．

不过，在命题演算里，我们只注意命题的真、假值，对它们的内容含意故意暂时忽略，暂不考虑．

我们虽然对命题暂不分析成更简单的成分，但我们却往往把一些命题合并而组成更复杂的命题．这时我们要使用命题联结词．由于我们对命题只考虑其真、假值，对命题联结词我们也只考虑它们把怎样的真、假命题变成怎样的真、假命题．换句话说，我们把命题联结词看作以{真，假}为定义域而以{真，假}为值域的函数，也叫做**真值函数**．

我们经常使用的命题联结词有五个.

1. **非**,记为$\neg$. 它把命题A变成$\neg A$(非A). 当A"假"时$\neg A$"真";而当A"真"时$\neg A$"假". $\neg$又叫做**否定词**.

2. **且**,记为$\wedge$. 它把命题A、B变成$A\wedge B$(A且B). 当A、B均"真"时,$A\wedge B$"真";此外情况(即A、B中至少有一为假时)便$A\wedge B$"假". $\wedge$又叫做**合取词**,而A、B叫做合取式$A\wedge B$的因子.

3. **或**,记为$\vee$. 它把命题A、B变成$A\vee B$(A或B). 当A、B有一为"真"时,$A\vee B$"真",此外情况(即A、B均假时)便$A\vee B$"假". $\vee$又叫做**析取词**,而A、B叫做析取式$A\vee B$的项. 按这里的定义,当A、B均真时,$A\vee B$为真,亦即$\vee$是可兼的'或',日常语言中亦经常使用不可兼的'或',即只当A、B一真一假时,'A或B'为真,而A、B均假或A、B均真时'A或B'为假. 这样的'或'不能表为$\vee$,而应表为'A、B有一成立也只有一成立'.应用上文介绍过的符号,亦可表为

$$(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B).$$

4. **如果…则**,记为$\to$. 它把命题A、B变成$A\to B$(如果A则B).当A"真"而B"假"时,$A\to B$为假;此外情况(即非A与B有一为真时)便$A\to B$为"真". $\to$叫做**蕴涵词**,$A\to B$叫做**蕴涵式**,A叫做该蕴涵式的**前件**,而B叫做其**后件**.按这里的定义,非A真(即A假)时,$A\to B$必真,B真时$A\to B$也真.从而下列的蕴涵式都是真的蕴涵式:

如果雪是黑的，则 3 大于 2 .（前件假，后件真）

如果雪是黑的，则 3 小于 2 .（前后件均假）

如果雪是白的，则 3 大于 2 .（前后件均真）

只有下列的蕴涵式才是假的：

如果雪是白的，则 3 小于 2.（前件真而后件假）

这样的规定似乎包括得太广了一些，与通常的蕴涵词（如果…则…）的用法不太符合，但根据它来作推理却是没有毛病的，而且根据经验，比用别的蕴涵词更为方便.

5. **恰当**，记为 $\leftrightarrow$. 它把命题 A、B 变成 $A\leftrightarrow B$（A 恰当 B）. $\leftrightarrow$ 叫做**等价词**（或**等值词**），$A\leftrightarrow B$ 叫做**等价式**，A、B 叫做它的两边（或两端）. 当 A、B 同为真或同为假时，$A\leftrightarrow B$ 为真，此外情形（即 A、B 一真一假时）便 $A\leftrightarrow B$ 为假. 由此可知，当 A、B 一真一假时，$\neg(A\leftrightarrow B)$ 为真，亦即“不可兼的 A 或 B”恰可表为 $\neg(A\leftrightarrow B)$.（这是又一个表示式）

以上五个命题联结词，是最常用的联结词. 日常所用的别的联结词，只要是真值函数，都可用这五个联结词来表示. 例如，

既…又…	他既聪明又用功（可表为 $\wedge$）
不是…就是…	不是前进就是后退（可表为 $\vee$）
除非…否则…	除非他来否则我不去（我去 $\to$ 他来）
要…必须…	要我去必须他来（我去 $\to$ 他来）

等等，其实，只使用下列三组之一亦就够了. 因为，极易验证（只须验证 A、B [illegible]为假，共四个情况即够）：

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A).$$

故↔可用∧与→表示，此外，

$$A \vee B = \neg A \to B = \neg(\neg A \wedge \neg B),$$

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \to \neg B),$$

$$A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B).$$

因此，靠¬的帮助，可用∨而表示∧及→，用∧而表示∨及→，用→而表示∨及∧. 在讨论推导过程时，使用¬与→最方便；但在别的情况，则兼使用¬∨∧最方便，这时虽然使用了三个基本符号，但各表达式既简单又对称.

还可指出，∨与电路上的并联相当，而∧与电路上的串联相当. 对电子技术而言，∨相当于"或"门，而∧相当于"与"门("或"门"与"门的名称，其实就是从逻辑中借用而得). 因此，命题演算可以广泛地应用于电路、网络以及电子技术方面. 这时，同时使用¬∨∧三种联结词就显得其重要了.

凡不能再分解成由一些小命题利用命题联结词而组成的命题，就叫做**原子命题**. 在命题演算中，将用命题符号或命题变元而表示. 命题符号及其否定可以叫做**简单命题**. 简单命题的合取(析取)式叫做**简单合取(简单析取)式**. 由简单合取(析取)式再作析取(合取)，所得便叫做**析合(合析)范式**. 命题符号可用大写拉丁字母 A、B、C 等表示.

例如，A 及 $\neg B$ 便是简单命题. $(A \wedge \neg B) \wedge C$ 便是简单合取式，$(A \vee B) \vee \neg C$是简单析取式. 而$((A \wedge \neg B) \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$是析合范式.

如果对一个复合命题中出现的不同命题符号任意地赋以“真”或“假”值(或叫做指派以真假值)，按其中的命题联结词的意义进行运算，整个复合命题便必然取得“真”或“假”以为值，这值叫做在相应的赋值(或指派)之下该复合命题所取得的值.视其值为“真”或“假”,该赋值(指派)便叫做该复合命题的**成真**或**成假赋值**(**指派**).

一般说来.一复合命题可以有多个成真指派,也可以有多个成假指派. 但是，简单合取式至多只有一个成真指派,简单析取式至多只有一个成假指派. 例如,

简单合取式 $A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D$ 的唯一成真指派为 (A, B, C, D) 取值(真,假,假,真). 别的指派均是成假的;

简单析取式 $A\vee\neg B\vee\neg C\vee D$ 的唯一成假指派为 (A, B, C, D) 取值(假,真,真,假). 别的指派均是成真的.

极易设法使得成真指派与简单合取式一一对应，而成假指派与简单析取式一一对应.

明白这点以后，任意一个复合命题都可以表示成合析范式,亦可以表示成析合范式.其办法是:

找出该复合命题的一切成真指派，再写出每个成真指派相对应的简单合取式,将这些简单合取式再作析取,所得便是该复合命题的析合范式.

找出该复合命题的一切成假指派，再写出每个成假指派相对应的简单析取式,将这些简单析取式再作合取,所得便是该复合命题的合析范式.

还须注意，如果该复合命题没有成真指派，则取$A \wedge \neg A$作为它的合析范式及析合范式，如果它没有成假指派，则取$A \vee \neg A$作为它的析合范式及合析范式.

没有成假指派的复合命题又叫做**重言式**. 对其中的命题符号,不论指派以怎样的真、假值,它永取得真值.这种复合命题便是逻辑规律.

没有成真指派的复合命题也叫做**矛盾式**，或**自相矛盾式**.

根据重言式(逻辑推理)而作的推理，亦即对其中的命题只根据命题联结词而考虑，不再深入到命题的更细致的结构,这便是最简单的推理.这种推理在日常中也应用得很广,我们不应忽视.

根据数理逻辑的研究，重言式可归结为下列的公理系统，即整个重言式恰巧就是可由下公理系统所推得的一切公式.

重言式的公理系统

组成部分：命题符号,用A, B, C …(或附下标) 表示。

公式：(1) 命题符号为公式.

(2) 如果α为公式,则$\neg\alpha$为公式.

(3) 如果α、β为公式,则$\alpha \vee \beta$、$\alpha \wedge \beta$、$\alpha \rightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta$亦为公式.

(4) 所谓公式,仅限于由(1)～(3)而得的.

推理部分：公理.具有下列十一种类型的公式叫做公理.

(1) $\alpha\to(\beta\to\alpha)$,

(2) $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$,

(3) $(\neg\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\neg\beta)\to\alpha)$,

(4) $(\alpha\wedge\beta)\to\alpha$,

(5) $(\alpha\wedge\beta)\to\beta$,

(6) $\alpha\to(\beta\to(\alpha\wedge\beta))$,

(7) $\alpha\to(\alpha\vee\beta)$,

(8) $\beta\to(\alpha\vee\beta)$,

(9) $(\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\vee\beta)\to\gamma)$,

(10) $(\alpha\leftrightarrow\beta)\to((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha))$,

(11) $((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha))\to(\alpha\leftrightarrow\beta)$.

推理规则：只有一条，即分离规则：

$$\alpha\to\beta,\ \alpha\vdash\beta$$

(即：由 $\alpha\to\beta$ 与 α 可以推得 β)。

注意：这里不使用代入规则，因为公理中的 α、β 不是命题符号或命题变元，而可以是复杂的公式。亦即我们已对公理作了代入，把代入结果所得的公式都叫做公理了。

根据数理逻辑的研究，这种推理还可表述成下列的形式，叫做自然推理系统(的命题演算部分)。

自然推理系统

甲 1. 在任何一步均可引入一个假设，引入之后到消去假设前，所推得的结果都依赖于所引入的假设。

注意：理论上说，可随意引入假设，但实际上，所引入假设可只限于

(1) 待证公式中出现的蕴涵式的前件。例如，如想

证$((A\to B)\to A)\to A$，可引入假设 A，$A\to B$，$(A\to B)\to A$ 中的任意一个，因为它们都是待证公式中蕴涵式的前件（当然，引入哪一个，在哪一步引入，须看具体情况决定）。这样的假设叫做当然假设。

(2) 待证公式中出现的蕴涵式的后件的反面（即，当后件为 B 时，引入假设 $\neg B$；当后件为 $\neg B$ 时，引入假设 B）。这样的假设叫做反证假设。我们希望引入这样的反证假设后，可引起矛盾，从而把引入的假设否定之。

(3) 如果推出 $A\vee B$，则可先引入假设 A，推到一定地步后消去假设 A，再引入假设 B，推到一定地步后再消去假设 B。这两个假设叫做穷举假设。它相当于，我们已经知道或 A 或 B 时，可假设 A 而看其后果如何，再假设 B 而看其后果如何（假设 A 与假设 B 不能联合使用）。

除却上面三种假设外，我们不引入别的假设。

引入假设后，由甲 2 及戊 1 告诉我们如何消去假设。一般说来，当然假设及穷举假设用甲 2 方式消去，而反证假设用戊 1 方式消去。

甲 2. 如果在假设 A 之下推得一公式 B，则 $A\to B$ 不依赖于假设 A。我们说已得依赖于 A 的 B 后，可消去假设 A 而得 $A\to B$。

乙 1. 由 $A\wedge B$ 可推得 A，亦可推得 B。

乙 2. 由 A，B 可推得 $A\wedge B$。

丙 1. 由 A 可推得 $A\vee B$，亦可推得 $B\vee A$。

丙 2. 由 $A\vee B$，$A\to C$，$B\to C$ 可推得 C。

丁 1. 由 $A\leftrightarrow B$ 可推得 $A\to B$，亦可推得 $B\to A$。

丁 2. 由 $A\to B$，$B\to A$ 可推得 $A\leftrightarrow B$。

注意：比较乙与丁，可见 $A\leftrightarrow B$ 实际上和 $(A\to B)$

$\wedge(B\to A)$无殊．如果采用定义：$A\leftrightarrow B$指$(A\to B)\wedge(B\to A)$，那末由这定义及乙1，乙2便可推得丁1，丁2了．

戊1． 由矛盾（即由A及$\neg A$）可消去前面任一个假设．当消去假设B时可得$\neg B$，当消去假设$\neg B$时可得B．

换句话说，如果由B而推得矛盾，则可得$\neg B$；如果由$\neg B$而推得矛盾，则可推得B．

自然推理系统显然与我们日常使用的推理过程非常相似．这也表明了命题演算的确是我们日常的推理过程的总结．

每个公理系统都需受到三个方面的检查．

第一、**融贯性（不矛盾性）**．即由该公理系统不致于推出两个互相矛盾的命题来，即没有A使得A与$\neg A$同可推出．我们公理系统所推出的全是重言式．而A与$\neg A$不可能同是重言式，当然不能两者都推出．

第二、**完备性**．即我们所希望推出的全部都能推出．在这里，我们希望推出全部重言式，这已经证明是满足的．而我们还有更强的完备性．即任意取一个我们公理系统所不能推出的公式，如果把同类型的一切公式加入，作为公理，则将可以推出一切公式，从而整个系统变成毫无意义的了．这便表明本公理系统已经尽可能地推出尽可能多的公式了．这是又一种完备性，叫做**绝对完备性**．

第三、**独立性**．即在我们公理系统中如删去任何一条公理，都将不能推出全部原来所能推出的公式．这种独立性是可取的，但不是必须的．有时为了种种原因，我们

多列几条公理以便于推导，这时便只好牺牲独立性了．在我们的系统中，独立性亦是有的，今不详细论证．

现在再说逻辑演算的第二部分：谓词演算．

这里，我们首先要对以前的简单命题加以分析．

固定逻辑的论域，论域中的元素叫做个体，另外有两种函数，它们都以论域为定义域，其中以真、假为值域的叫做**谓词**，仍以论域为值域的叫做**函数**（或强调地，叫做**项值函词**）．谓词作用于个体时，所得的叫做**公式**，函词作用于个体时，所得叫做**项**．一般，函词又叫做函数．

为确定起见，我们暂时以自然数域作为论域，从而其个体便是各个自然数．这时，

"为素数"，"大于"，"整除"便是谓词，

"3为素数"，"4大于 y"，"a 整除 b"便是公式．

当公式中的变元代入以具体的自然数时便得命题（或真或假）．例如"3为素数"为真，而"4大于5"为假，等等．

"的平方"，"的最大公约数"，"的3倍"便是函数，

"x 的平方"，"x 与 y 的最大公约数"，"m的3倍"便是项．项中的变元代以具体的自然数时，便得出一个自然数以为值．例如，"3的平方"便是9，"6与8的最大公约数"便是2，等等．

注意，谓词与前面的命题联结词不同，虽则两者同以真、假为值，但谓词以论域作为定义域，而命题联结词则以{真，假}作为定义域，两者截然不同．

在谓词中，二元谓词"等于"，非常重要．它是纯逻辑谓词（别的谓词都不是纯逻辑谓词）．$x=y$ 真当且仅当 x

与 y 是同一个体.

除对命题进一步分析为谓词与个体以外，谓词演算还有另一个新内容，而且是更重要的新内容，那就是我们还引入量词与摹状词. 有了这两者以后，可以说，日常用语以及一切数学推理都可以表达了.

量词共有两个，一是**全称量词**，记为 $\forall$，读作"所有的"、或"每个"、或"一切"；另一个是**存在量词**，记为 $\exists$，读作"有一个"、"有些"、"至少有一个"，等等.

在某一方面看来，量词很似个体，当谓词作用于它时便得出一命题. 例如，试以 $P(x)$ 表示谓词"x 为奇数"，则

3 为奇数　　可记为　$P(3)$，(真)

一切数为奇数　可记为　$P(\forall)$，(假)

有些数为奇数　可记为　$P(\exists)$，(真)

它们都是命题. 从这一点看来，量词和个体本质相同，都被谓词作用而得一命题(亦即填到谓词的空位处去后，便得一个命题).

但是，细究起来，不但意义上量词绝非个体，而且谓词作用于量词时，所服从的规律也与谓词作用于个体时截然不同.

第一　谓词作用于量词时不能深入，而谓词作用于个体时一定可以深入. 例如，设 $P(x)$ 表示 x 为奇数，就个体而言，

(1) $\neg(P(3))$　并非 3 为奇数　(假)

(2) $(\neg P)(3)$　3 为非奇数　(假)

这两句话的意义是一样的,即 3 可深入.但对量词而言,

(3) $\neg(P(\forall))$ 并非一切数为奇数 (真)

(4) $(\neg P)(\forall)$ 一切数都是非奇数 (假)

它们不但不同真假,意义也不相同.又如

(5) $\neg(P(\exists))$ 并非有些数为奇数 (假)

(6) $(\neg P)(\exists)$ 有些数是非奇数 (真)

它们亦是意义不同的.所以,量词是不能深入的.

第二 谓词作用于个体时是可以分配的, 但作用于量词时,一般是不能分配的.例如,仍用 $P(x)$表示 x为奇数,$Q(x)$表示 x 为偶数,则

(7) $P(3)\vee Q(3)$ 3为奇数或 3 为偶数 (真)

(8) $(P\vee Q)(3)$ 3为奇数或偶数 (真)

两者意义相同,从而"3"可分配到各别的谓词去,但

(9) $P(\forall)\vee Q(\forall)$ 一切数均为奇数或一切数均为偶数.

(10) $(P\vee Q)(\forall)$ 一切数都为奇数或偶数.

两者意义不同,前句假而后句真.又

(11) $P(\exists)\wedge Q(\exists)$ 有些数为奇数并且有些数为偶数.

(12) $(P\wedge Q)(\exists)$ 有些数为奇数兼偶数.

两者意义亦不同,前句真而后句假.这些都表示当被谓词作用时,量词是不能分配的.

总结一句,当谓词作用于量词时,不但要表示出谓词的空位,还要说明是哪一个谓词的空位.例如,句(3)中的空位是谓词P的空位,句(4)中的空位则是谓词$\neg P$的空

位．单纯用 $\forall$ 填入空位去而不表明是什么谓词的空位，而写成$\neg P(\forall)$，是会导致意义混淆的．这是使用量词时与使用个体时极大的区别点，必须注意，不容忽略．

由于这点不同，可见我们不能象个体那样，单纯地把量词填到谓词的空位处去便算．但谓词的空位又不能不填，如不填将仍是谓词而得不出命题来了．我们的办法是，对每个量词都附上一个尾标，把尾标填到谓词的空位去，而量词本身则写在相应的谓词之前．例如，上面各例应该表示为(用 t 表示量词的尾标)：

（3） $\neg\forall tP(t)$　　　（4） $\forall t\neg P(t)$

（5） $\neg\exists tP(t)$　　　（6） $\exists t\neg P(t)$

（9） $\forall tP(t)\vee\forall tQ(t)$　（10） $\forall t(P(t)\vee Q(t))$

（11） $\exists tP(t)\wedge\exists tQ(t)$　（12） $\exists t(P(t)\wedge Q(t))$

依习惯在量词后面亦兼写出尾标，这样读起来更为方便．

$\forall tA(t)$读为“任何 t 均 $A(t)$”．

$\exists tA(t)$读为“有 t 使得 $A(t)$”．

通常，将 $A(t)$叫做量词($\forall$ 或 $\exists$)的**作用域**或**辖域**，而 t 叫做受量词约束的**约束变元**．依我们说法，则 t 是量词的尾标，填到作为作用域的谓词的空位处去；通常说法则是“量词 $\forall$ 或 $\exists$ 把作用域中的变元 t 约束了”．无论如何，尾标(即约束变元)与未受约束的变元是截然不同的，在同一公式中不能用同样的符号表示．其次，(同一公式中的)不同量词的尾标必不同，亦不能用同样的符号表示．因此，我们永远约定，尽管尾标亦叫做个体变元，使用相同符号，但是：

在同一公式中，尾标与变元必用不同符号表示.

在同一公式中，不同量词的尾标必用不同符号表示.

这两种约定都是非常合理的，非常自然的.但却方便下面的讨论.

当同一公式而有多个量词重迭使用时，其意义如下确定.

试就 $\exists x \forall y A(x, y)$ 而言，先考虑谓词 $A(x, y)$. 对每个给定的 x 而言，可有零个，一个，多个，乃至全体的 y，使 $A(x, y)$ 为真. 因此，如果全体 y 均使 $A(x, y)$ 真，则 $\forall y A(x, y)$ 真；否则，$\forall y A(x, y)$ 假. 但这个真假须依赖于 x，即 $\forall y A(x, y)$ 又是关于 x 的谓词. 如果有一个 x 使 $\forall y A(x, y)$，则 $\exists x \forall y A(x, y)$ 真；否则，$\exists x \forall y A(x, y)$ 假. 换句话说，如有一个 x 使得对全体 y 而言均有 $A(x, y)$，则 $\exists x \forall y A(x, y)$ 为真，否则 $\exists x \forall y A(x, y)$ 为假. 由这个考虑，可见就作成 $\exists x \forall y A(x, y)$ 这个公式而言，我们先添 $\forall y$ 再添 $\exists x$；但就读这个公式而言，却是先读 $\exists x$（有一个 x），再读 $\forall y$（对全体 y 而言）. 这是一般的规律. 读者试读下列各公式：

$$\forall x \forall y A(x, y), \qquad \forall x \exists y A(x, y),$$

$$\exists x \exists y A(x, y), \qquad \exists x \forall y A(x, y).$$

与量词平行的是摹状词. 它相应于日常语言中的“者”字.

x 著作 y（谓词）	y 的著作者
x 扮演 y（谓词）	y 的扮演者

等等．设有谓词 $A(x, y)$，则 $\iota xA(x, y)$ 表示使 $A(x, y)$成立的那个 x（它依赖于 y）．这里要使得 $\iota xA(x, y)$ 有意义，必须 $A(x, y)$满足下列两条件

存在性：有 x 使 $A(x, y)$ 成立，即 $\exists xA(x, y)$为真．

唯一性：至多一个 x 使 $A(x, y)$ 成立．可表示为

$$\forall x_1\forall x_2(A(x_1, y)\wedge A(x_2, y)\to x_1=x_2).$$

当唯一性不成立时，通常每每对 $A(x, y)$增添条件而成为新的谓词 $B(x, y)$，而 $B(x, y)$满足唯一性．于是，使用 $\iota xB(x, y)$以代替 $\iota xA(x, y)$．当存在性不成立时，通常每每补充约定：

$$\iota xA(x, y)\text{指 } z\text{，当 } \neg\exists xA(x, y)\text{时}.$$

这时每每写成 $\iota x\to zA(x, y)$．必须注意，这样的 z 是根据约定而取的，它并不满足 $A(z, y)$．

通常认为，量词是把公式变成公式，而摹状词则是把公式变成项．依我们上面的说法，则是谓词填以量词及其尾标后变成公式，而谓词填以摹状词及其尾标后则变成项．

在命题演算中，纯逻辑概念是命题联结词，命题联结词可以看作真值函数，其意义可以预先确定，不随它所出现的公式而更改．同样，在谓词演算中，纯逻辑概念是量词及摹状词，我们也应该预先确定其意义，使得不必随它所出现的公式而更改．这时我们不能限于讨论真、假值，还须考虑谓词的性质，与定义域有关的性质．

谓词是以个体域为定义域而以真、假为值的函数.今就一元谓词 $A(x)$立论.

如果 $A(x)$对定义域内一切值均取得真值,则 $A(x)$叫做**永真谓词**. 如果定义域内至少有一值使它为真，则 $A(x)$叫做**可满足谓词**(或**非永假谓词**).如果定义域内一切值均使 $A(x)$假, $A(x)$便叫做**永假谓词**.

如果定义域内有一值也只有一值使 $A(x)$为真，则 $A(x)$叫做**刻划谓词**(因用它可刻划某个个体).

这时,我们便可以确定量词与摹状词的意义了.

如 $A(x)$为永真谓词,则 $\forall xA(x)$真，否则 $\forall xA(x)$假.

如 $A(x)$为可满足谓词,则 $\exists xA(x)$真,否则 $\exists xA(x)$假.

如 $A(x)$为刻划谓词，而 x_0 使它真，则 $\iota x \to zA(x)$指 x_0,如果 $A(x)$非刻划谓词,则 $\iota x \to zA(x)$指 z.

显然这样定义后,量词、摹状词的意义与它所出现的公式无关.

在命题演算中，每一个公式(复合命题)只由命题变元与命题联结词组成，我们只要把复合命题中的命题变元分别指派以真或假，按照命题联结词的意义便可以计算出整个复合命题的真假值了.但在谓词演算中,公式的组成却复杂得多. 其中除(1)命题变元(命题符号)及(2)命题联结词以外,还有：

(3)个体符号(个体变元)；

(4)谓词符号,函词符号；

(5)量词符号，摹状词符号(包括量词尾标，摹状词尾标).

其中(1)、(3)、(4)不是固定的，近似于变元，我们应作指派(赋值)，临时指定其值，而(2)、(5)是逻辑符号，具有固定不变的意义，我们应一次性地给以解释，对此我们上面已经这样作了. 但在解释的过程中，却牵涉到一个论域. 故论域应该给定. 给定后个体符号要在该论域的元素中作指派，谓词、函词符号要在该论域的谓词、函词中作指派. 这个论域不是固定的，可以随公式的不同而不同，甚至公式确定后，仍可以任意地选取论域. 因此，对一个给定的公式而言，我们不是有一个固定的指派，而是有一个相应于某论域的指派.

所谓论域，就是一个非空的集合 D.

相应于 D 的指派，就是：个体变元指派以 D 的元素，谓词符号指派以 D 上的谓词(即以 D 为定义域以真假为值的函数)，函数符号指派以 D 上的函数(即以 D 为定义域及值域的).

当然，不管 D 为何，命题符号均指派以真或假值.

对公式中的变元、符号，指派完毕以后，即可以根据命题联结词的解释(真值函数的解释)，根据量词与摹状词的上述解释，来确定一公式的真假值了.

这里必须注意一点，在联结词的定义中，我们是假设 A、B 等的真假已知从而确定 $A \wedge B$ 的真假的，依归纳证明，我们是必能够从简单而复杂、从内而外地逐步确定各公式的真假的. 但就量词、摹状词的解释而言，我们须知

道相应于 $A(x)$的谓词(即不把 $A(x)$看作公式而看作谓词),但除谓词符号已作指派外,一般说来,$A(x)$是含有变元 x 的公式(或者 $A(x)$是已填了尾标 x 的公式),依归纳假设,对 x 作了指派后,可以知道 $A(x)$的真假,但从何知道作为谓词 $A(x)$的性质呢?我们说,既然给了x后依归纳假设可以知道 $A(x)$的真假,那末,当把 $A(x)$看作 x 的函数(看作 x 的谓词)时,它是否永真谓词,是否可满足谓词,是否刻划谓词也就可以确定、可以知道了.因此,依归纳证明,必可推得整个谓词演算公式的真假.换句话说,当对某公式作了相应于一论域 D 的指派后,便可以决定该公式的真假了.

如果对于同一的论域D 所作的一切指派,公式 α 均取得真值,则说 α 对 D 永真,如果有论域 D 的一个指派使公式 α 取得真值,则说 α 对 D 可满足.

如果公式 α 对一切论域 D 均永真,则说 α **是永真公式**;如果有一个论域 D 使 α 对D可满足,则说 α 是可满足公式.

永真公式便是逻辑规律,也就是数理逻辑中最受人注意的公式.没有量词及摹状词的永真公式也就是上文命题演算中的重言式.

永真公式亦可归结到公理系统.只须在上文的重言式公理系统稍作补充便得了.还应注意,在永真公式中,当然也应该把摹状词 $\iota x\to z$ 的理论也放进去.但要讨论摹状词,必须讨论一谓词是否满足唯一性条件,从而必须同时讨论相等词(等号).对此,通常都把相等词放在后面

(叫做具相等词的谓词演算)，在狭义谓词演算中，不讨论相等词及摹状词．我们这里也就暂时不谈摹状词的理论了．

永真公式的公理系统

组成部分：

命题符号　用 $A, B, C, \cdots$(或附下标)表示．

个体符号　用 $x, y, z, \cdots$(或附下标)表示．

(一般习惯，个体符号与尾标使用相同的符号．我们现在也这样做了．如果想用一套新符号表示尾标，则须添一栏：尾标符号，用 $t, u, v, \cdots$(或附下标)表示)．

谓词符号　用 $P, Q, R, \cdots$ (或附下标) 表示(并确定其元数)

函词符号　用 $f, g, h, \cdots$(或附下标) 表示(并确定其元数)

项　(1) 个体变元为项．

(2) 如果 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 为项，而 γ 为 k 元函词，则 $\gamma(\eta_1, \cdots, \eta_k)$为项．

(3) 所谓项，仅限于由(1)、(2)所作成的．

注意：我们不使用摹状词．如果使用摹状词，还须添一栏：由公式 $\alpha(x)$经摹状词 $\iota x \rightarrow z\alpha(x)$而作成的为项．

公式

(1) 命题符号为公式，叫做原子公式．

(2) 如果 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 为项，而 δ 为 k 元谓词，则 $\delta(\eta_1, \cdots, \eta_k)$为公式，亦叫做原子公式．

(3) 如果 α 为公式，则 $\neg\alpha$ 为公式．

(4) 如果 α、β 为公式，则 $\alpha\vee\beta$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta$ 亦为公式．

(5) 如果α为公式，$\alpha\binom{x}{t}$指在α中处处将x代入项t，则$\forall t\alpha\binom{t}{x}$，$\exists t\alpha\binom{t}{x}$亦为公式。

(6) 所谓公式，仅限于由(1)～(5)而作成的。

推理部分：公理。除(1)～(11)与重言式公理系统相同外，还添入下列公理。

(12) $\forall t\alpha\binom{t}{x}\to\alpha\binom{\eta}{t}$，这里$\eta$为任何一项，$\alpha$为任何公式。

(13) $\alpha\binom{\eta}{t}\to\exists t\alpha\binom{t}{x}$，$\alpha$，$\eta$同上。

推理规则：除分离规则与重言式公理系统相同外，还添入下列两条推理规则。

全称规则。$\gamma\to\alpha\vdash\gamma\to\forall t\alpha\binom{t}{x}$　x为一个个体变元。

存在规则。$\alpha\to\gamma\vdash\exists t\alpha\binom{t}{x}\to\gamma$。

在两规则中，x为个体变元而γ中没有x的出现。

全称规则是说，如果对个体变元x(作为变元)而推出(γ不含有变元x)公式$\gamma\to\alpha$，则可推出$\gamma\to\forall t\alpha\binom{t}{x}$。存在规则是说，如果推出$\alpha\to\gamma$，其中$x$是作为个体变元出现于$\alpha$中，但不出现于$\gamma$中，则亦可以推得$\exists t\alpha\binom{t}{x}\to\gamma$。

和命题演算处一样，在谓词演算中也有自然推理系统。使用它，可以更快地、更方便地推出各永真公式来。这个系统只须在重言式的自然推理系统中添入下列五条便够了。

1. 由$\forall t\alpha\binom{t}{x}$可以推得$\alpha\binom{\eta}{t}$（这里$\eta$为任何项）。

2. 由$\alpha\binom{\eta}{t}$可以推得$\exists t\alpha\binom{t}{x}$（这里$\eta$为任何项）。

3. 如果推得α，其中出现变元x，x又不出现在α所依赖的假设中，则可以推得$\forall t\alpha\binom{t}{x}$。

4. 如果推得 $\exists t\alpha\binom{x}{t}$,则可引入假设 $\alpha\binom{x}{e}$, e 为从未出现过的个体变元.这假设叫做命名假设.它相当于日常的下列推理:"已经推得 $\alpha\binom{x}{t}$必有一根,暂命这根为 e,从而有 $\alpha\binom{x}{e}$." (所以我们叫做命名假设,因它对已经证明存在的根加以命名).

5. 如果推出一个公式 β,它依赖于命名假设 $\alpha\binom{x}{e}$,但 β 本身不含有变元 e,则认为 β 不再依赖于$\alpha\binom{x}{e}$. 亦即,从命名假设 $\alpha\binom{x}{e}$如推出一个不含变元 e 的公式 β,则可消去假设 $\alpha\binom{x}{e}$,仍得公式 β.

以上便是永真公式的自然推理系统.

谓词演算的公理系统可以说弗雷格已经基本上得到了,但直到罗素才完整地表述出来.即使在罗素所给出的系统中,还表达得不够完善,而且由于罗素本身的理论(为避免悖论而提出的类型论),他还给出两种表述方式,无论那一种方式,都不够完整. 是贝尔内斯 (P. L. Bernays)加以改进后,才得出今天(基本上得到全体数理逻辑家的承认与采用)这个公理系统.

至于自然推理系统,出现更在其后(在三十年代才开始出现),而且至今还没有获得全体数理逻辑家一致赞成、一致采用的说法. 有好些说法更可以说是有毛病的,有逻辑谬误的. 因为,有些书上提出"由 $\exists t\alpha\binom{x}{t}$可以推得 $\alpha\binom{x}{t}$",这个说法显然是荒谬的.奇怪的是,竟有好些数理逻辑家喋喋不休地为它辩护,或提出一些换汤不换药的有毛病的说法来代替它. 其实,命题演算并没有承认"由 $A\vee B$ 可以推得 A",为什么这里却硬要说"由 $\exists t\alpha\binom{x}{t}$ 可

以推得 $\alpha\binom{x}{e}$”呢？如果前者是引入穷举假设 **A**，那末这里引入“命名假设”将是最妥当不过的了.

认出这个系统是永真公式的公理系统（这是哥德尔(K. Gödel)1930年的成果），是数理逻辑的一大成就.

谓词演算还可加以推广，而得到高级谓词演算，或叫做广义谓词演算. 而上文所说的谓词演算，(为区别起见)可叫做**一级谓词演算**或**狭义谓词演算**. 推广的要点在于引入谓词、函词变元或谓词、函词空位(在该空位处可填入具体的谓词、函数，或谓词符号与函词符号). 相应地，可作两件事.

第一. 把量词、摹状词的尾标也相应推广，容许有谓词尾标及函词尾标(以前的尾标均只限于个体尾标)，具有这种尾标的量词、摹状词便叫做**二级量词**、**二级摹状词**. 这样便得出**二级谓词演算**.

第二. 如果不但把量词、摹状词尾标推广，把谓词、函数也推广，容许其空位为谓词、函词空位，这样得出高级谓词、函词，从而也得出高级谓词演算.

后面这种推广引起的问题很多，如不小心会出现悖论. 如想处理悖论，其结果与集合论相差不多，而方便大大不及集合论. 因此，现在数理逻辑界几乎全部废弃后面这种高级谓词演算，只讨论前面那个二级谓词演算. 但是，即使这个，也不及狭义谓词演算那么重要，我们也就不多说了.

我们再介绍数理逻辑的四大内容，而且大体上根据历史发展的次序来叙述，以便读者同时清楚其来龙去脉.

二、集 合 论

十九世纪中叶，为着解决数学分析基础问题，建立了极限论；为了成立极限论，必须发展实数论；再进一步，又必须发展自然数论．这两工作都由戴德金 (J. W. R. Dedekind)完成．他把实数定义为满足“分割”条件的两个有理数集，而自然数则由满足一定条件的无穷系(即今天所谓的无穷集)而确定．接着康托儿 (G. Cantor) 又发展了无穷集，定义了无穷基数与序数．康托儿的定义是：把一个无穷集中各元素的其他性质都舍弃掉．单留下个数与次序，结果便得到序数，集合 A 的序数记为 $\overline{A}$，如果连次序也舍弃掉，单留下个数，结果便得到基数，集合 A 的基数记为 $\overline{\overline{A}}$．因此，基数比序数更基本．康托儿得到一条有名的定理，一集的基数必小于其子集之集的基数．亦即，如命 A 的子集的集为 B，记为 $B=\{x:x\subseteq A\}$ (“$\subseteq$”表示包含于)，则有 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$．在康托儿晚年，他已觉察到他的集合论如果发展彻底的话，是会导致矛盾的，在基数中有矛盾，序数中也有矛盾．但康托儿没有说出来(也许正在设法解决，要待解决方案确定后再公布)．但布拉里-佛尔蒂(C. Burari-Forti) 却从中推出一个显然与大家一致承认的结果相矛盾的结果，从而使大家知道集合论中出现了一些问题．

与这同时(或稍前一些)，弗雷格正式使用集合的概念来定义基数与序数，不再使用“舍弃”这个过程．他的办法是：

A 的基数(记为 $\overline{\overline{A}}$)指：与 A 等势的一切集合的集，亦即

$$\overline{\overline{A}}=\{x:x\sim A\}.\ (\sim\text{表示等势})$$

A 的序数(记为 $\overline{A}$)指：与 A 相似的一切集合的集，亦即

$$\overline{A}=\{x:x\simeq A\}.\ (\simeq\text{表示相似})$$

这里，明确地使用“集合的集”．当然，康托儿也使用集合的集，因为上文的 $B=\{x:x\subseteq A\}$ 便是集合的集．但这个 B 是符合于直觉的集合，它的的确确是由一些集合组成的集合．但弗雷格把基数定义为集合的集合，那就是另外一回事．说由集合抽象而得基数，我们很愿意承认，说基数是集合的集合，比如，2是对偶集的集合，这就很难令人相信了．因此，弗雷格的作法是一个新观点，的确在数学史上、逻辑史上开创了一个新纪元，也给集合论以一个崭新的面貌．

但很快，在布拉里-佛尔蒂的发现后不久，罗素(他独立地得出弗雷格的想法，获得同样的理论)发现了如照他自己的想法(亦即弗雷格的想法)，是会引起矛盾的．矛盾出现的经过如下：

在逻辑学中向来都把谓词(宾语)用集合来解释，从而任给一谓词(亦即任给一个含变元 x 的公式)$Q(x)$，都有一个集合 A 满足 $\forall x(x\in A\leftrightarrow Q(x))$，这叫做“概括原

理[b]，是逻辑学中一条基本原理．如果把 $Q(x)$ 代以一个含变元 x 的公式 $\neg(x\in x)$，便得 $\forall x(x\in A\leftrightarrow\neg(x\in x))$．现在既讨论了集合的集合，亦即把集合纳入个体范围之内，故个体变元可以取集合为值，于是这里的 x 亦可代入以 A，从而得 $A\in A\leftrightarrow\neg(A\in A)$．这便是一个矛盾．

这个矛盾的出现，使弗雷格改变其主张，也使罗素要花大力气去解决，而且，数学的基础也成了问题．对于数学基础问题，前后出现了三大主张，成了基础方面的三大派，其一是以希尔伯特 (D. Hilbert) 为首的形式主义学派，另一个是以布劳韦尔(L. E. J. Brouwer)为代表的直觉主义学派（这两种学派将分别在证明论与递归论这两部分中介绍)，其三便是罗素的逻辑主义学派．罗素曾建议三个方案：限量法，无类法及 Zigzag 法．而后来他决定采用无类法，认为集合不存在，有关集合的公式均可改用谓词而表示．这本来也是一个很吸引人的方案，可惜罗素在谓词演算中容许有高级谓词（具有谓词空位的谓词），因而他的无类法实际上仍是承认集合的存在．真正用来克服悖论的是罗素提出的与之配合的理论，即类型论，而且是分支类型论．这种类型论是肯定可以克服悖论了，但却不能推出整个数学，不符合于罗素所主张的逻辑主义．因而罗素又提出“可化归性公理”，提出这条公理后，不但悖论能否避免成了问题，而且类型论所根据的基础也动摇了．罗素本人后来也放弃了可化归性公理，于是如何推导出整个数学便成了问题．有些数理逻辑家则主张采用简单类型论以替代分支类型论及可化归性公理．这样，数

学是可以推导出来了，但这理论本身仍有好些问题，而且使用起来并不方便.

解决悖论的另一途径便是集合论的公理化. 即建立一个公理系统，用公理来刻划集合的各种性质.最著名的公理系统是策梅罗(E. Zermelo)所给的 (后来又由弗兰克尔(A. Frankel)加以改进)的系统，通称 ZF 系统. 这个系统的主要精神是：集合论悖论的出现，在于使用了太过强有力的无条件的概括原理.现在取消这条原理，改而采用它的若干条特例，这样集合论的公理的力量将大大地减弱，从而也不能推出悖论来了，这个公理系统如下.

集合论的 ZF 公理系统

组成部分：

变元符号 $x, y, z, \cdots$(可附下标)；

谓词符号 $\in$(属于)，$=$(等于).

公理：

除了具等词的一级谓词演算的公理外，还有如下各条公理：*)

1. 外延性公理. $\forall x(x\in y\leftrightarrow x\in z)\rightarrow y=z$
2. 对偶公理. $\exists z\forall x(x\in z\leftrightarrow(x=u\vee x=v))$
3. 联集公理. $\exists z\forall x(x\in z\leftrightarrow\exists y(x\in y\wedge y\in z))$
4. 幂集公理. $\exists z\forall x(x\in z\leftrightarrow\forall y(y\in x\rightarrow y\in u))$
5. 无穷公理. $\exists z(\varnothing\in z\wedge\forall y(y\in z\rightarrow\{y\}\in z))$
6. 正则公理. $\exists x(x\in u)\rightarrow\exists x(x\in u\wedge\forall y(y\in x\rightarrow\neg(y\in u)))$

*) 下面，$\varnothing$表示空集，$\{a\}$表示以 a 为唯一元素的单元素集，而 $a\cup b$ 表示集 a 与集 b 的并集，$a\cap b$ 表示 a 与 b 的交集(均可用$\in$而定义)，$a\subseteq b$ 表示 a 包含于 b.

7. 分出公理. $\exists z\forall x(x\in z\leftrightarrow(x\in u\wedge A(x)))$

8. 替换公理. 设 ψ 为多一对应, 即 $\forall x\forall y\forall z(\psi(x, y)\wedge\psi(x, z)\rightarrow y=z)$, 则

$$\exists z\forall x(x\in z\leftrightarrow\exists y(y\in u\wedge\psi(y, x))).$$

9. 选择公理. 对每个集 a, 均有一函数 f, 使得: 如果 $x\subseteq a$ 且 $x\neq\varnothing$, 则 $f(x)\in x$.

在这些公理中，外延性公理表明对两集合只考虑其元素是否相同,相同者便是一个集合.这是集合论的基本条件.2、3、4、7、8是概括原理的特例.如使用概括原理,这些公理便可以马上推得. 如果我们暂时把$\{y\}$记为 Sy, 那末无穷公理说,有一集, 它含有$\varnothing$, 而且只要含有 y 便也含有 Sy,从而这集合至少含有

$$\varnothing, S\varnothing, SS\varnothing, SSS\varnothing, \cdots$$

这样的集合叫做归纳集. 显然，归纳集含有无穷多个元素,是无穷集合的一种.罗素使用的无穷集要保证有无穷多个个体,这里则保证有无穷多个元素便成了.

分出公理及替换公理与概括原理最为接近，从而在很多地方可以起概括原理的作用.

选择公理是最引起争论的一条公理.其意义是,对集 a 的各非空元素集 x, 都可以指定其中的一个元素 $f(x)$ (使得 $f(x)\in x$). 表面看来, x 既然非空,随便指定 x 的一个元素作为 $f(x)$便成了.问题在于 a 并非有穷集. 如果 a 是有穷集,设其元素为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 那末就各 a_i 逐一的任意指定其中一元素作为 $f(a_i)$便可.但如果 a 是

无穷集，这时 f 的定义域(即 a)便是无穷集，我们必须要有一条函数规律才能确定 f. 而这条规律却不是容易看出的. 只有根据选择公理才能肯定 f 的存在. 读者或者不大相信这段话的论证. 试看下例.

在区间[0,1]上，如果 $x-y$ 为一有理数，我们便把 x 与 y 放在同一组中，如 $x-y$ 为无理数，则 x 与 y 放在不同组中. 这样，便把区间[0,1]上的全体实数分成无穷多组. 我们想在每一组中取出一数作为代表. 亦即找出一函数 f，对每一组 x 而取出一数 $f(x)$(使 $f(x)\in x$). 我们能不能做到呢？根据选择公理，这个 f 是存在的. 但除根据选择公理外，我们别无他法以确定 f. 如果承认这个 f 存在，我们便可以作出一个不是可测的实数集；如不承认这个 f，那末不可测实数集是否存在便不可知了. 由此可见选择公理的重要性.

根据数学家的研究，人们发现如果承认选择公理，那末将得出好些相当古怪的结果. 最有名的是分球定理：

一个闭球 U 可以分成两个互不相交的集合 A、B (即 $U=A\cup B$)，且 U 与 A 可由相同的有限多个互相合同的小集合并成，U 与 B 亦可由相同的有限多个互相合同的小集合并成.

粗略一点说，就是：可以把一个球 U 分成两个与 U 具有同样体积的球 A 与 B.

因此，看来选择公理是难于承认的. 但是，人们又发现了，如果不承认选择公理，那末数学中好些最基本的定理，为迄今人们全体所承认的，将不能证明，因为它们的

证明实质上都要依赖于选择公理.例如:

可以有一个实数集的模型,在其中一实数集 E 有聚点 a,但 E中却没有点列 x_n 以 a 为极限,即在E 中找不出点列 x_n 使得 $\lim_n x_n = a$.

可以有一个实数集的模型,在其中极限的两个定义并不等价,这两个定义是:$\lim_{x\to a} f(x) = l$ 指:

(1) 任给 $\varepsilon>0$,永有 $\delta>0$,使得$0<|x-a|<\delta$时永有 $|f(x)-l|<\varepsilon$;

(2) 任给 x_n,只使 x_n 永$\neq a$、且 $\lim_n x_n = a$,则必有 $\lim_n f(x_n) = l$.

凡此等等,都表明要想不使用选择公理,也会使现有的数学面貌大大改观的.

以上是有关集合论公理的一些注意. 在发展集合论时,最重要的两个内容是基数论(有穷基数、无穷基数与基数算术)及序数论(有穷序数、无穷序数以及超穷归纳).

在基数论中,最重要的是讨论基数的加法、乘法和乘方,并且证明了:一集合A的子集的集(记为 pA),其基数是以 A 的基数为指数的二乘方,即我们有 $\overline{\overline{pA}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$.根据康托儿定理,我们有:$2^{\overline{\overline{A}}}>\overline{\overline{A}}$.

无穷集有两种定义,其一是:其基数不是自然数的集叫做**无穷集**.这通常又叫做**非归纳集**(因为自然数适用归纳原理,而基数不是自然数的集当然不服从归纳原理,故又叫非归纳集).另一个定义是:与自身的某个真子集能

够建立一一对应的集叫做**无穷集**，通常又叫做**反身无穷集**．这两种定义看来都能够抓住有穷与无穷的特点．但是要证明这两个定义彼此等价，却又非借助于选择公理不可．因为我们可以作出一个模型，在其中有一类集合，其基数肯定不是自然数，但是，如不借助选择公理，它却不能与其任何一个真子集建立一一对应．

凡能与自然数集建立一一对应的集，叫做**可数无穷集**．其基数通常记为$\aleph_0$(这里，$\aleph$是希伯莱字母，读为"阿里夫")．因而，自然数集的子集所组成的集，其基数便是$2^{\aleph_0}$．已经证明这集与实数集是同基数的，即实数集的基数便是$2^{\aleph_0}$．

在集合上可以定义一个次序关系$<$(偏序)．它具有

(1) 反自反性．即 $\forall x\neg(x<x)$．

(2) 反对称性．即 $\forall x\forall y(x<y\rightarrow\neg(y<x))$．

(3) 可传递性．即 $\forall x\forall y\forall z((x<y\wedge y<z\rightarrow)x<z)$．

如果再加入连通性，便得到**全序**．

(4) 连通性． $\forall x\forall y(x<y\vee x=y\vee y<x)$．

如果再加入良基性，便得到**良序**．

(5) 良基性．任何一个非空子集均有一个最小元素．即

$$\exists x\psi(x)\rightarrow\exists y(\psi(y)\wedge\forall z(\psi(z)\rightarrow y\leqslant z))．$$

凡良序集都可以定义一个序数．凡比某一序数α为小的所有序数，又组成一个良序集，该良序集所定义的序数恰为序数α本身．这是康托儿当时所获得的结论．

现在我们都直接定义序数而不从良序集出发，方法

如下.

A 为隶属可传(省为隶传)，指A的任何元素均为 A 的子集.即 $\forall x(x\in A\to x\subseteq A)$.

一集 A 如果是隶传的,而且它被 $\in$ 所良序,则 A 叫做一个序数.

有关序数的很多性质,这里都不赘述了.

这里发生一个很有趣的问题.设有一自然数集(其基数为 $\aleph_0$)，由该集的一切子集所作成的集,这集便是连续统,其基数应为 $2^{\aleph_0}$. 此外，由该自然数集可以作成各种良序集(从而决定各序数)，这些不同的序数所组成的集的基数记为 $\aleph_1$. 我们问，$2^{\aleph_0}$ 与 $\aleph_1$ 的大小关系如何?

容易证明，$\aleph_1$ 是大于 $\aleph_0$ 的基数中最小的一个. 从而有 $2^{\aleph_0}\geqslant\aleph_1$. 康托儿猜想 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.这便是**连续统假设**.

更进一步,由一个可良序集，设其基数为 $\aleph_\alpha$.由该集的一切子集所作成的集,其基数为 $2^{\aleph_\alpha}$. 而由该集所作成的序集,决定各种序数. 所有这样的序数所组成的集,其基数是比 $\aleph_\alpha$ 大的基数中最小的,记为 $\aleph_{\alpha+1}$. 我们问，$2^{\aleph_\alpha}$ 与 $\aleph_{\alpha+1}$ 的关系如何? **广义连续统假设**认为应有：

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}.$$

连续统假设与广义连续统假设是否成立?如果成立，如何证明,这是集合论中的一个大问题.希尔伯特在1900年的国际数学家大会上提出的 23 个未解决的数学问题，作为今后数学家研究的方向,其中第一个问题便是：求证连续统假设.

因此,连续统假设以及选择公理的研究,便是集合论

中两个最大的问题，是人们注意的中心．在很长的时间内一直未能得到解决．

1938年哥德尔首先证明了，这两命题与集合论中别的公理并没有矛盾，亦即：如果上述集合论的公理系统（删去选择公理）不发生矛盾，那末添入选择公理以及广义连续统假设以后，所得的公理系统亦没有矛盾．

这是一个大突破．因为长期以来，人们对选择公理一直怀有戒心，能够不用它便不使用它；万不得已时，只好使用，但亦标明在证明中已经使用了选择公理．人们这样做，是因为万一有一天证明了选择公理不合用，可以随时抛弃它，而没有使用它的部分便可以很安然地保存下来了．现在经过哥德尔的证明，人们放心了，至少对选择公理不抱敌意的人可以放心了，只要别的部分没有问题，那末选择公理亦是没有问题的．

哥德尔的证明方法大体如下：如果别的公理没有矛盾，那末可以作出一个模型，在其中别的公理是成立的．在这个模型中，可以发展序数论．于是，可以按照一定的办法作出足够多的序数（良序集）．然后，我们把这些序数的全体作成一个新模型，在这个新模型中，不但集合论的别的公理继续成立，而且选择公理（甚至于很强的选择公理，所谓全局选择公理）成立，广义连续统假设亦成立．既然有一模型（新模型）满足这些公理，那末它们当然是不矛盾的了．

哥德尔的方法叫做内模型法，其方法是（假设某些公理不矛盾）先造出一个模型，满足某些公理，再对这个模

型加些限制，从而得出一个更小的模型(内模型)，它不但满足原来的公理而且还满足一些新公理，因而证明了，把这些新公理添到原来的公理去时，只要原来的公理没有矛盾，那末添入后亦不会发生矛盾．

但是，连续统假设乃至于选择公理，能够不能够由别的集合论公理推出来呢？这正是康托儿原来的想法，他宣称他已经推出了连续统假设，不日即将发表，后来一直没有发表，大概他知道他原来所作的证明不完整之故．

1963 年，科恩(P. J. Cohen)证明了，由集合论中别的公理推不出选择公理，别的公理加入选择公理后推不出连续统假设，加入连续统假设后仍推不出广义连续统假设．换言之，它们都是推不出来的，亦即把它们的否定加入以后，是不会发生矛盾的．

科恩详细地论述了，要证明选择公理和连续统假设的独立性，是不能使用内模型法的，必须使用一种新的方法，叫做力迫法．力迫法的理论比较艰深，我们这里就不多介绍了．只是指出，力迫法是一个很重要的方法，利用它，不但证明了选择公理和(广义)连续统假设是独立于别的集合论公理的，而且数学上好些独立性问题，以前长久以来一直未能解决的，借助于力迫法后，也一一得到了解决(总共有五、六十个问题之多)．可以说，力迫论的出现，是数理逻辑(尤其是集合论)的一个重要的进步．后来，力迫论又有新发展，出现了各种力迫论，固有力迫论，迭代力迫论等等，都受到人们的注意．

根据哥德尔与科恩的两个结果，可以知道，在集合论

别的公理之上,加入选择公理或其否定,可以分别得到一个不矛盾的公理系统,加入连续统假设或其否定,亦可以分别得到一个不矛盾的公理系统.因此,集合论类似于几何学.在绝对几何的公理之上,加入欧几里得平行公理或其否定,可以分别得到一个不矛盾的公理系统,那便是欧几里得几何及非欧几里得几何.

有人主张,可以添入与连续统假设相矛盾的命题作为公理,从而得出非康托儿集合论.又有人主张,集合论是讨论集合的,连续统的大小是有客观标准的.现在我们对集合论的知识知道得较少,由这些较少的知识不能决定连续统的大小,但将来会决定其大小的.

这两方面的论点,谁更合理,读者可自作决定.

我们只指出一点,有一命题,叫做马丁(A. Martin)公理(其实叫做马丁假设更合适),它可由连续统假设推得,而由它推不出连续统假设(即,马丁公理弱于连续统假设).但是由连续统假设推出的命题(重要的有八十多条),几乎绝大部分(七十来条)可由马丁公理推得.因此马丁公理也很受人们的注意.

近年来,集合论的发展集中在下列几个方向上:

其一是大基数公理.我们可以假设具有某些性质的集合,为了满足这些性质,集合的基数不能太小(更不能是有穷集),通常都必须具有很大很大的基数.这种集合不能从集合论的公理推出其存在.这时,我们假设其存在,这个假设便是一条大基数公理.现在已经研究了好些具有很大基数的集合,弄清了它们的性质以及彼此的关

系，从而也对集合论有进一步的认识．

其次是描述集合论，讨论在取补、射影等运算之下，能够由一些集合造出怎样的集合．这种研究与实变函数论有极密切的关系，与拓扑学也有关，现在已经有很丰富的成果．

与此相配合的还有关于可决定性公理的研究．要介绍决定性公理，首先介绍两人游戏．设有甲、乙两人，并给出一个实数集 A．甲、乙两人轮流给出一个数字(个位数字)，经过无穷步后，这些数字组成一个无穷小数．如果这个无穷小数在 A 内则甲胜，否则乙胜．

决定性公理是说：任给实数集 A，甲、乙之中必有一人有决胜策略．由这个决胜策略的存在，可以证明任何实数集都是可测的，从而与选择公理相矛盾．因此更引起人们的注意，想看看，如果把可决定性公理引入以代替选择公理，将会有怎样的结果．

集合论的内容很丰富，和别的数学分支也有很密切的关系，而且数学各部门的一些基本概念都可用集合加以定义．可以说，在一定意义上，集合论是整个数学的基础．因此，集合论得到迅速的发展是一点也不奇怪的．

三、递 归 论

递归论又叫做能行性论．能行性论所以受到人们的注意，是有各种原因的．

在集合论悖论出现的时候，除却罗素与策梅罗各按不同的方法加以解决以外，布劳韦尔提出直觉主义，给以一个截然不同的解决方法．布劳韦尔认为，问题不全出于集合论上，还出于逻辑本身．即使在极简单的命题演算里，¬(非)与∨(或)的意思也应该从严检查．比如，逻辑学中的排中律“A 或¬A”便只是把对有限集成立的规律推广到无穷集去的结果．在谓词演算中，那里讨论到量词，全称量词与存在量词更应该从严检查．布劳韦尔有一个有名的论点：“不能使用排中律，但排中律不假”．这充分表现出布劳韦尔学说的新奇处．经过直觉主义者多方解释，以及人们和直觉主义者的多次论战，人们逐渐知道直觉主义的说法主要在于注重能行性，凡不是能行性的东西都不承认．既然如此，如果我们仍用古典的说法，不抛弃非能行性的东西，但却把能行的与非能行的区别开来，便能够兼顾古典逻辑与直觉主义逻辑之长了．正是这样的想法，于是产生了能行性论．由于它是从递归函数论发展而来的，一般也就叫做递归论．

造新函数时，最根本的方法是叠置法(又叫复合法)，

无须细说．此外，从小学乃至儿童时候起，人们还使用两种也是很根本的方法，那便是原始递归式法以及求逆函数法．

小孩子会扳指头而计数，即学会了“加1”的方法．以后，由 a 开始，n 次加 1 便是 $a+n$；从 0 开始，n 次加 a 便是 $a\cdot n$．这种由加 1 函数而造加函数，由加函数而造乘函数，使用的便是原始递归式．原始递归式的一般形状是：

设已有二元函数 g，由 g 而用下法造 f（二元）：

$$f(u,\ 0)=u,$$

$$f(u,\ x+1)=g(x,\ f(u,\ x))$$

（g 还可依赖于别的参数，这时 f 也依赖于这些参数）．

有三个函数最简单，可作为开始的函数，它们是：零函数 $O(x)$，后继函数 Sx（即加 1 函数）以及射影函数（又叫做广义么函数）$I_{mn}(x_1,\ \cdots,\ x_m)=x_n$．这些函数几乎是无须计算便可以得出其值的，合称**本原函数**．

凡由本原函数出发，经过有限次叠置以及原始递归式而作成的函数，叫做**原始递归函数**．

将原始递归式略作推广，由二元的 h 及一元的 g 而造 f（二元）如下：

$$f(u,\ 0)=u,$$

$$f(u,x+1)=h(x,\ f(u,\ g(x)))．$$

这叫做**一般递归式**．当取 g 为么函数 I（$Ix=x$）时，一般递归式便变成原始递归式．因此，原始递归式是一般递归式的特例．

由本原函数出发，经过有限次的叠置与一般递归式所作成的函数，叫做递归(部分)函数.

这里有一个特点：即使 h、g 处处有定义，但由一般递归式所造的 f 未必处处有定义，甚至几乎处处没有定义，其原因是：如想求 $f(u, a)$，当 $a\neq 0$ 时须由第二式计算，先求 $f(u, gDa)$(其中，Dx 表示 $x-1$)，如 $gDa\neq 0$，仍须由第二式计算，先求 $f(u, gDgDa)$即 $f(u, (gD)^2a)$，如 $(gD)^2a\neq 0$，又须先求 $f(u, (gD)^3a)$……一直求到 $f(u, (gD)^m a)$而$(gD)^m a=0$ 为止，这时由第一式知 $f(u, (gD)^m a)=f(u, 0)=u$，然后逐步倒退，便可以计算 $f(u, a)$的值了. 但如果 $(gD)^m a$ 永不等于0，即任何 m 均使得 $(gD)^m a\neq 0$，那末 $f(u, a)$便将无定义了. 所以由一般递归式一般只能求得部分函数（未必处处有定义的函数），不一定得到处处有定义的全函数，这是一个新奇的地方.

在小学里，我们由加法而定义减法（减法是加法之逆)，由乘法而定义除法(除是乘的逆).一般，设已有函数 $f(x)$，我们可以定义其逆 f^{-1} 如下：

$$f^{-1}(u)=\mu x(f(x)=u).$$

这里 μx 与 ιx 相似，但不是指 “$f(x)=u$ 的唯一的 x 根”，而是指“$f(x)=u$ 的最小 x 根”. 对自然数集而言，只要有 x 根，便必然有最小的 x 根，所以唯一性是没有问题的(不可能有多值). 但当 $f(x)=u$ 没有 x 根时，为了考虑到能行性，我们不另行约定，而把 $f^{-1}(u)$ 考虑为没有定义. 因此，求逆运算所定的逆函数，一般也只能是部分函数，不一定是全函数.

从加、乘两函数出发，经过有限次的叠置与求逆运算而作成的函数，叫做**可摹状(部分)函数**.

数理逻辑学家已经证明了，递归(部分)函数与可摹状(部分)函数是一致的.求逆运算比较常见，因此通常多使用可摹状(部分)函数，并把它就叫做**递归函数**.

自从二十年代引进原始递归函数概念以后，人们开始询问，凡可计算的函数是否都是原始递归函数？亦即，原始递归函数是否穷尽了可计算函数？这个问题很快便由阿克曼(W. Ackermann)给的一个反例而否决了．他作出一个函数，毫无疑问是可计算的，但却证明了不可能是原始递归函数.于是，人们开始寻找原始递归函数以外的可计算函数.在这方面，最有名的是哥德尔根据厄尔勃朗 (J. Herbrand) 暗示而建立的一般递归函数——依其性质，叫做“可形式计算的函数”更妥.

哥德尔所说的函数，是可以作出一组定义方程，其中只出现函数符号与数常元、数变元符号，根据这组方程可以对某函数的任一变元值而计算出该函数的值来．人们很快便证明了，这种函数与可摹状函数(或上面的递归函数)是一致的，还证明了与邱吉(A. Church) 所说的“可λ定义函数”亦是一致的.

在 1936 年，邱吉提出一个论点：凡直觉上所说的可计算函数与可λ定义函数相同，亦与上面所说的递归函数相同.

前后不久，杜林(A. M. Turing)亦提出一个论点：凡直觉上所说的可计算函数均是可用杜林机器计算的函

数.这里所说的杜林机器,是当时杜林特别设计的一种机器.

很快人们证明了:能用杜林机器计算的函数,恰巧就是递归函数.于是,两个论点实质上是一个论点.

除计算函数以外,人们也要对谓词作出判定,即判定当给出 $x_1, \cdots, x_n$ 的值后,一谓词 P 在 $x_1, \cdots, x_n$ 处是真或假. 如果定义一函数 p, 使得"当 $P(x_1, \cdots, x_n)$真时,$p(x_1, \cdots, x_n)=0$; 而当 $P(x_1, \cdots, x_n)$假时, $p(x_1, \cdots, x_n)=1$",则 p 叫做 P 的**特征函数**. 既然对可计算函数有了上述论点, 人们理所当然地又认为, 如果一谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$的特征函数是递归函数, 则说 $P(x_1, \cdots, x_n)$是**可以判定的**,或说**可以完全判定**.

如果找到一个函数 p, 使得当 $P(x_1, \cdots, x_n)$真时, $p(x_1, \cdots, x_n)=0$,但当 $P(x_1, \cdots, x_n)$假时, $p(x_1, \cdots, x_n)$无定义, 即 p 为递归部分函数, 则说 $P(x_1, \cdots x_n)$是**可以半判定的**(当 P 为假时可能永不知道).

这两类的可判定性都很重要.同样,对可计算性也应进一步探讨.

上面所说的函数,一般是部分函数.递归部分函数的实质是,只要该函数有定义,必能计算其值.因此,所谓递归部分函数是可计算的, 实际上是说,有值时必可计算.看来这种说法也有一定的道理, 没有值从何计算? 当然不能要求别人来计算. 但我们总可以要求能够判定它有值与否.连有值与否也不能判定,则所谓可计算至少要打一个折扣了,因此,我们采用下列的说法: 如果只要函数

有值的地方必可计算其值，则该函数叫做**可以半计算的**．如果还能判定它有值或否，则该函数便叫做**可以完全计算的**．

在这两个论点提出的同时，人们作出一个通用机器和一个通用函数，从而立刻找到一个不能计算的函数．我们可以按一定的方法把机器的程序排码，或把定义方程组编码．所谓"通用机器"，是：它本身有一定的结构（或执行一定的程序），当你把别的机器的编码输入给它后，它便能模仿该机器的动作．所谓"通用函数"，是（例如 n 元通用函数）一个 $n+1$ 元函数，当你把任何一个 n 元函数的定义方程的编码填入它的第一个空位时，它所取的值恰和该 n 元函数一样．换一句话说，有一个 $n+1$ 元函数 g，对于每一个 n 元递归函数 f，都有一个数 m（它即是 f 的定义方程的编码）使得 $g(m, x_1, \cdots, x_n)=f(x_1, \cdots, x_n)$．这样，马上可证 $g(x_1, x_1, \cdots, x_n)$ 决非 n 元递归全函数．否则，$g(x_1, x_1, \cdots, x_n)+1$ 也将是 n 元递归全函数，从而应有 k，使得 $g(k, x_1, \cdots, x_n)=g(x_1, x_1, \cdots, x_n)+1$．令 $x_1=\cdots=x_n=k$，便会得出矛盾的结果了．

同理，我们也有通用谓词，n 元通用谓词是一个 $n+1$ 元谓词 Q，使得对每个 n 元递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 均有一数 m，使得 $G(m, x_1, \cdots, x_n)\leftrightarrow P(x_1, \cdots, x_n)$．从而，同法可证 $G(x_1, x_1, \cdots, x_n)$ 决非递归谓词．

更为重要的是，已经证明这个 G 可由原始递归谓词添加存在量词而作成．又已经证明，原始递归谓词可由加法、乘法、等号，以及命题联结词、受限量词而作成．所谓

受限量词，是指：

受限全称量词 $\forall x\leqslant n$，即 n 以下一切 x 均……

受限存在量词 $\exists x\leqslant n$，即 n 以下有一个 x 使得……

但命题联结词作用于代数方程仍可用代数方程来表示。因此，一切原始递归谓词均可以由一个代数方程$P=Q$前面添加受限量词而得。经过数理逻辑家的研究，有存在量词（不受限的）的帮助后，在代数方程前面添加受限量词的式子，可以表示为代数方程前面添加存在量词。

总结起来，原始递归谓词前面添加存在量词，可以改而表示为：代数方程前面添加存在量词。在特例，上面所说的 $G(x_1, x_1, \cdots, x_n)$可以表示为

$$\exists t_1\cdots\exists t_k(P(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_k) = Q(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_k)).$$

这个谓词实即是说：代数方程 $P=Q$ 对 $t_1, \cdots, t_k$ 有解（当给定 $x_1, \cdots, x_n$ 时）。换言之，谓词 G 实际上是判定代数方程是否有解的谓词。既然 G 不是递归谓词，那末，这个代数方程是否有解便是不能判定的。

1900年希尔伯特在国际数学家大会上提出的23个未解决的数学问题中，第十问题是：找出一个算法，用以判定任给一代数方程（具整系数的）是否有解。根据上面结果，可知第十问题是否定地解决的，即这个算法是不存在的（当我们承认邱吉-杜林论点时）。

由上所述，可知原始递归谓词（它本是可判定的）添了存在量词以后便不可以完全判定了。如果再添全称量词，一般，由原始递归谓词添上（不受限的）量词后，便得

到各种的不可以判定的谓词.根据数理逻辑的研究,如果邻近的两量词是同类的(即同为存在量词或同为全称量词)总可设法并成一个量词. 因此,所添的量词可限于下列各种:

$$\exists x_1,\ \exists x_1\forall x_2,\ \exists x_1\forall x_2\exists x_3,\ \cdots\cdots$$

$$\forall x_1,\ \forall x_1\exists x_2,\ \forall x_1\exists x_2\forall x_3,\ \cdots\cdots$$

将它们添到原始递归谓词后,所得的谓词分别叫做 Σ_1, Σ_2, Σ_3, …(上行), Π_1, Π_2, Π_3, …(下行)谓词,足码越大的其判定越困难.一切数论函数上的谓词(不引用极限概念的)都属于这些谓词之一. 有关这方面的研究,便构成递归论中一大分支,叫做分层理论(Theory of hierarchy).

另外,还有一个途径用以比较判定性的难易.我们不用谓词而用集合的语言来表述.

如果 $x\in A$ 当且仅当 $f(x)\in B$,而 f 为递归全函数,则说 A **可多一化归于** B,记为

$$A\leqslant_m B.$$

如 f 为一一的递归全函数,则说 A 可一一化归于 B,记为 $A\leqslant_1 B$. 化归有可传递性与自反性,即如 $A\leqslant_m B$、$B\leqslant_m C$,则 $A\leqslant_m C$. 又 $A\leqslant_m A$. 当 A 化归于 B 时,即表示对 A 的判定易于对 B 的判定.

如果 $A\leqslant_m B$,又 $B\leqslant_m A$,则说 A 多一等价于 B,记为

$$A\equiv_m B.$$

这时,表示两者判定的难易程度是一样的.

就多一化归性而言,我们没有 $A\leqslant_m A'$(这里 A' 表

示 A 的补集)，但通常认为能够判定 A 的人应该能够判定 A'，即两者判定难易性应是一样的．为此，人们又提出另一种化归性．

如果在递归函数的定义中，除本原函数外，还使用开始函数 g，则所造出的函数 f 叫做递归于 g 的．如用形式可计算性，则除 f 的定义方程外，在计算过程中我们允许使用有关 g 函数的值的等式．因此只要知道函数 g，也就可以计算函数 f 了．

如 A 的特征函数 $a(x)$ 是递归于 B 的特征函数 $b(x)$ 的，则说 A **化归于** B(亦说**杜林化归**)，记为

$$A \leqslant_T B.$$

它亦有可传递性与自反性．如果 $A \leqslant_T B$ 且 $B \leqslant_T A$，则说 A(图林)**等价**于 B，记为 $A \equiv_T B$．

根据等价性，可以得出化归度．对化归度的研究，是递归论的又一大分支．这方面的论文极多，是最活跃的部门．

另外，又根据递归函数而讨论复杂度，即(当使用图林机时)计算一函数所需的存储量与计算步数．这方面的研究，对计算机的使用关系极大，目前也为计算机科学所大力研究．

以上的研究基本上都是对自然数本身研究的．我们可以推广到更高的无穷序数去，得出 a 递归论等；又可以不研究自然数本身而研究表示自然数的数字，这直接与计算机的使用有关，这便是字递归函数．所有这些，可以说都是递归论的推广．

四、证 明 论

当出现集合论悖论，而布劳韦尔声称古典数学，包括古典逻辑，都不可信，须重新改造的时候，希尔伯特为古典数学辩护，认为在古典数学中的确含有一些实无穷的东西，这些可以叫做理想语句；但此外则全是可以验证的，是实语句．古典数学所以在实语句之外还要加入理想语句，为的是使系统简单而便捷．只要证明数学的实语句是无矛盾的，那末加入的理想语句也就不成问题了．希尔伯特于是建议，把数学的全部公理及推理规则都形式化(包括所用的逻辑公理与逻辑规则)，把数学的推理看作符号式子之间的变化，从公理出发，根据所允许的推理规则而作变换(形式符号的变换)．如果我们证明了不管如何变换，都不可能推出两行彼此互相否定的式子，那末便证得数学的不矛盾性(融贯性)了．这便是有名的希尔伯特规划．

贯彻这个规划的便是证明论．由于它以数学的推导为研究对象，或者更具体地说，以形式化的数学作为研究对象，这个被研究的对象叫做**对象理论**，而证明论本身则叫做**元数学**(或**元理论**)．对象理论只看作一些符号的排列，不考虑其内容，是没有内容的形式理论．元理论则是有内容的理论，但须使用极简单可靠的推理规则，希尔伯

特叫做有穷性的推理方法.

这个规划提出以后,阿克曼便证明了:对归纳原理略作限制的自然数论是融贯的,不矛盾的. 看来,希尔伯特规划已有一个良好的开端,人们期待这一工作日益进展,直至最终能够证明整个数学的融贯性.

但是,1931年,哥德尔证明了:对于一些比较强的系统(在其中可以发展部分的算术)而言,该系统的融贯性是不能在该系统内证明的. 这也就证明了希尔伯特规划的原来想法是不可能实现的.哥德尔的这一证明,其细节虽然很鲁嗦,但一些主要的想法并不难懂,而且也很值得我们学习.现在略为介绍如下.

一些比较弱的系统,例如在一阶谓词演算上加入了加法与乘法,并假定加法与乘法具有一些很常见的性质,记为系统 T.在这样弱的系统 T 内可以证明:原始递归谓词是可以表示的.所谓"可以表示"是一个专门术语,其意是:

(直觉上的)原始递归谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 可以在系统 T 内表示,是指系统内有一个谓词符号 Q,使得对任何自然数 $m_1, \cdots, m_n$,如果 $P(m_1, \cdots, m_n)$ 真,则 $Q(\overline{m}_1, \cdots, \overline{m}_n)$是 T 内可证公式;如果 $P(m_1, \cdots, m_n)$ 假,则 $\neg Q(\overline{m}_1, \cdots, \overline{m}_n)$是 T 内可证公式.(这里,$\neg$是 T 内表示否定的符号,$\overline{m}_i$ 是 T 内表示自然数 m_i 的符号.)

注意,原始递归谓词添上受限量词 $\forall x \leqslant n$及 $\exists x \leqslant n$,仍是原始递归谓词,仍可在 T内表示.但原始递归谓词添

上一般的不受限的量词 $\forall x$、$\exists x$，就不再是原始递归谓词，便未必可在 T 内表示了.

哥德尔指出，如果对系统 T 内的符号、公式以及公式系列都给以编码(这编码叫做哥德尔数)，那末有关系统 T 的一些元数学性质，如

(1) 第 n 号证明是第 k 号公式的证明，

(2) 第 m 号公式是第 n 号公式中把变元 x_i 代入以第 j 号项的结果，

等等，都可以表示为 m, n, i, j 之间的数论性质，而这些数论性质如果是原始递归的，都可以在 T 内表示. 特别，这里的(1)、(2)两性质都是可以在系统 T 内表示的.哥德尔还指出，下列两性质亦可以在系统 T 内表示：

对第 m 号公式中的变元 x_1 处处代入以表示自然数 m 的项(记为 $\overline{m}$) 所得的公式(暂叫做第 $g(m)$号公式)，可以用第 k 号证明来证明. 这是一个数论谓词，记为 $w(m, k)$，它是原始递归谓词，其意义是：第 k 号证明是第 $g(m)$号公式的证明.

因此，在系统 T内它可用谓词 $W(m, k)$来表示.(这个W未必是基本符号，一般说来，它是一个复杂的式子.)

今设 $\forall x_2 \neg W(x_1, x_2)$为第 m 号公式. 将其中的 x_1 处处代入以 $\overline{m}$，便得到第 $g(m)$ 号公式：

$$\forall x_2 \neg W(\overline{m}, x_2).$$

这公式意指：对任何 x_2，第 x_2 号证明都不是第 $g(m)$号公式的证明，亦即，第 $g(m)$号公式不可证.

换言之，第 $g(m)$号公式是说：第 $g(m)$号公式不可

证.

这便和古昔相传下来的誖论:“我这句话不是真的”非常类似.难怪它有一些古怪的性质.

哥德尔证明了:

哥德尔第一不完全性定理 如果系统T融贯，则第$g(m)$号公式不可证.（从而它为真的.)如果系统T是ω融贯的（适当定义），则第$g(m)$号公式的否定也不可证. 从而系统T便是不完全的，在其中有不可判定的命题——即第$g(m)$号公式.

哥德尔第二不完全性定理 当T融贯时,如果在系统T内能够证明与“T是融贯的”相对应的数论公式,那末,上面的第$g(m)$号公式亦可证.

根据上面的结果便得出：当T融贯时,在系统T内不可能证明“T融贯”. 即T融贯这个命题不可能在系统T内推出. 这便是上文我们说的.

自哥德尔定理出现以后，人们便必须把元数学的工具推广,不能限于希尔伯特所说的有穷性推理.沿着这个方向，坚钦(G. Gentzen)首先证明了，整个自然数论(即皮亚诺算术)是融贯的，他使用的工具是直到ε_0数的超穷归纳(这超出有穷性推理之外). 以后，人们又使用更强的超穷归纳，去论证实数论的融贯性，也获得很多成果,它大大推进了证明论的发展.

五、模 型 论

模型论主要是为某个数学理论构作一个模型，研究这个模型，从这个模型的性质而获得有关数学理论的性质.就其将整个数学理论作为研究对象这点来说，它与元数学(证明论)完全相似. 但证明论主要在于证明数学理论的融贯性，而模型论则研究数学理论各方面的性质.此外，证明论使用有穷性推理，即使后来推广了，也竭力限于明晰可靠的推理方法上.但是，模型论对所使用的推理方法毫无限制，整个数学推理方法都可以使用.

为数学理论而建立模型，其来源是很古老的.笛卡儿(R. Descartes)的解析几何，就是在实数论上建立起欧几里得几何的模型.所有一切几何学上的性质及关系，都可以在实数的性质及其关系上反映出来.直到现在，要证明欧几里得几何公理系统的融贯性，我们还是要靠解析几何这个模型呢！罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский)几何的建立，也是靠贝尔特拉米(E. Beltrami)与克莱因(F. Ch. Klein)在欧几里得几何中建立起相应的模型，这才使人们心悦诚服地相信非欧几里得几何的融贯性. 近代，罗素的命题演算的公理被人们发觉有一条是可以从其余公理推出，从而断定该公理系统不是独立的，至少可以删去一条. 人们要问，删去一条多余的公理后，余下来

的公理是否独立呢？亦即，是否不能再减少了？为此，贝尔内斯(P. L. Bernays)便作出各种方阵，证明剩下来的公理的确是彼此独立的，从而不可能再减少了．自此以后，各种公理系统源源而出，为了证明各公理系统的独立性，人们源源造出各种模型来，这些可以说都是模型论的前身．

模型论有两个主要结果：

骆文海(L. Löwenheim)定理 一阶理论如果有模型，它必有可数模型，即该模型的论域的基数是可数无穷的．

紧致性定理 设有一个无穷的公式集，如果它的任何有穷子集都有模型，则整个公式集(无穷集)也有模型．

这两个结果都在模型论发展成熟以前老早便获得了，由此可见模型论中的结果是应用非常广泛的，以致于未有成熟的理论以前，其零星结果老早便被人们注意而使用了．

哥德尔的定理(完全性定理与不完全性定理)以及塔斯基(A. Tarski)关于真实性的定理，可以说都是模型论的萌芽．但是，模型论的发展以至成熟，则在五十年代．以骆文海定理及紧致性定理为中心，研究数学理论的模型的各种性质．其中最突出的一点是：非标准模型的发现．

所谓非标准模型，大体说来如下．我们建立一个数学理论，无非想刻划某个论域．现在对这个数学理论建立模型，如果该模型与原来的论域同构，我们便说是标准模型；如不同构，便是非标准模型．

论域一般都是无穷论域（有穷论域几乎不值得详细讨论）.对无穷论域而言，非标准模型的存在，虽然出于我们的意外，但却是极容易理解的.我们试用下列例子作说明(当然不是证明，要严格证明是相当困难的).

设用 N 表示自然数集，我们希望刻划 N 的数学理论能够使得 N 恰巧含有 0,1,2,……,不多不少. 但假设有一关于 N 的数学理论，它已容许

$$0\in \mathbf{N},\quad 1\in \mathbf{N},\quad 2\in \mathbf{N},\ \cdots\cdots,$$

现在我造一个新模型满足下列公理，即容许有一个 x，满足

$$x\in \mathbf{N},\quad x\neq 0,\quad x\neq 1,\quad x\neq 2,\ \cdots\cdots.$$

我这样做绝不会导致矛盾. 因为要证明我的做法会导致矛盾，必须从原来的数学理论以及我所添入的假设而导出，但导出矛盾时只能使用有限条公式，而从原有的数学理论以及我所添的有限条公式中绝不可能导出矛盾. 因为对有限的 n 而言，永远有 x 使得 $x\in \mathbf{N}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$, $\cdots, x\neq n$. 而不致于矛盾.

以前，人们认为由皮亚诺 (G. Peano) 的五条公理，即可以唯一地刻划自然数集；认为由戴德金 (J. W. R. Dedekind) 的分割可以定义实数，换言之，如果在有理数的公理系统之上，加入戴德金连续公理，便可以唯一地刻划实数集了.但是，经过模型论的研究，发现并非如此.人们可以作出一个满足皮亚诺的五条公理的模型，而它与通常的自然数集并不同构. 人们还可以作出满足实数公理系统的模型，而且(根据骆文海定理)是可数模型，即其

中实数只有可数多个，当然与通常的实数集不同构了．这些新奇的模型，便叫做非标准模型．

这些非标准模型的出现，人们作的解释是：以前是使用谓词，例如皮亚诺的五条公理中的归纳公理，应该使用谓词变元写成：

$$(\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(sx)))\rightarrow\varphi(x)$$

现在则是"命 $\varphi(x)$ 表示任一含 x 的公式"，但谓词变元 φ 是不可数多个，而公式则是可数多个，两者不同．由"任一公式 φ"，当然不能唯一地刻划自然数集了．关于实数公理系统也是这样，人们认为，以前在戴德金连续公理中使用谓词变元，故可以唯一地刻划实数集，现在也是使用"任一公式"，当然也不能唯一地刻划实数集了．但是使用谓词变元，从而使皮亚诺算术与实数算术建立于二阶谓词演算之上后，是否便和以前的算术与实数论一致了呢？对此，模型论中也有热烈的讨论．

作为一个副产品，罗宾逊(A. Robinson)证明了：利用算术与实数集的非标准模型，我们可以明确无讹地定义无穷大、无穷小，并把极限论以及数学分析建基于无穷大、无穷小之上，如牛顿(I. Newton)与莱布尼茨 (G. W. Leibniz) 当年那样．他并指出了，有若干定理可以从非标准模型考虑而得出更快捷的证明．因此，一时有很多人企图在数学分析的开始阶段便根据无穷大、无穷小而考虑．

其实，只要人们稍为熟悉一点极限论，马上会发现使用极限论比使用无穷大、无穷小更为快捷方便，而不易犯

错误.对初学的人不教他们掌握极限论,而教他们沿无穷大、无穷小这条路而思考,即使有非标准模型论来保证其合理,但其不便于初学是显而易见的. 因此,无穷小理论作为模型论的一个副产品,是可以承认的,但要用它来代替极限论,那是不明智的.

模型论是数理逻辑中最新发展的一个部门,发展非常迅速,应该引起注意.